HERVIER
Thibault
TS4

Enigme Maths solaires 2

Posons (σ_n) la suite des sommes des nombres écrits au tableau à l'itération n, $n \in \mathbb{N}$

On a 2019 nombres écrits, donc 2018 itérations avant d'arriver à un seul nombre écrit sur le tableau (on enlève 2 nombres et on en rajoute 1 à chaque itération).

L'énoncé nous dit que le dernier nombre est 3.

Ainsi, $\sigma_{2018} = 3$.

Montrons que ce n'est pas possible.

Au départ, à l'itération 0, on a tous les nombres de 1 à 2019 écrits.

Ainsi, $\sigma_0 = 1+2+\ldots+2018+2019$

$$= \frac{2019(2019+1)}{2}$$

$$= \boxed{2\ 039\ 190.}$$

Posons a_n et b_n les nombres tirés au sort à l'étape n, avec $2019 \geq a_n \geq b_n > 0$

On a donc : $\sigma_{n+1} = \sigma_n - a_n - b_n + (a_n - b_n)$

$$= \sigma_n \cancel{-a_n} - b_n \cancel{+a_n} - b_n$$

$$= \boxed{\sigma_n - 2b_n}$$

Montrons par récurence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n \equiv 0[2]$.

Pour $n=0$ $\sigma_n = \sigma_0 = 2\ 039\ 190 \equiv 0[2]$.
La propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons $k \geq 0$, et $\sigma_k \equiv 0[2]$. On veut montrer que $\sigma_{k+1} \equiv 0[2]$
On a :
$\sigma_{k+1} = \sigma_k - 2b_k$

$$\equiv 0 - 2b_k\ [2]$$

$$\equiv 2\times(-b_k)\ [2]$$

$$\equiv \boxed{0[2]}$$

La propriété est héréditaire pour $k \geq 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sigma_n \equiv 0[2].}$

Or, $\sigma_{2018} = 3 \equiv 1[2]$

C'est absurde

donc $\boxed{\sigma_{2018} \neq 3}$

Il y a eu une erreur dans les calculs.