Énigme 6 - Mars

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tous les points dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs sont coloriés en rouge.

Peut on trouver un cercle de centre A(√2, 1/3) qui passe par au moins deux points rouges ?

Les trouveurs

Clément Arnould, Samy Vincent

Résolution

Soit B(x;y) et C(u;v) deux points rouges tels que AB = AC.

Cette égalité de distance s'écrit:

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{3}\right)^2=\left(u-\sqrt{2}\right)^2+\left(v-\tfrac{1}{3}\right)^2$$

Un développement de chaque membre de l'égalité donne:

$$x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{9}=u^2-2\sqrt{2}u+2+v^2-\tfrac{2}{3}v+\tfrac{1}{9}$$

ou encore:

$$x^2-2\sqrt{2}x+y^2-\tfrac{2}{3}y=u^2-2\sqrt{2}u+v^2-\tfrac{2}{3}v.$$

On peut réécrire cette égalité comme suit:

$x^2 - u^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}u = v^2 - y^2 - \frac{2}{3}v + \frac{2}{3}y$

ou encore:

$(x-u)(x+u) - 2\sqrt{2}(x-u) = (v-y)(v+y) - \frac{2}{3}(v-y)$

soit:

$(x-u)\big((x+u) - 2\sqrt{2}\big) = (v-y)\big((v+y) - \frac{2}{3}\big)$

Peut-on avoir $u \neq x$?

Si l'on avait $u \neq x$, on pourrait écrire:

$(x+u) - 2\sqrt{2} = \frac{(v-y)\left((v+y)-\frac{2}{3}\right)}{x-u}$

et

$\sqrt{2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{(v-y)\left((v+y)-\frac{2}{3}\right)}{x-u} - (x+u)\right)$

Comme u, v, x, y sont des entiers et que $\frac{2}{3}$ est un rationnel, le membre droit de cette égalité est un rationnel. Or cela est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Conclusion: $u = x$.

Peut-on avoir $v \neq y$?

Puisque $u = x$, l'égalité $(x-u)\big((x+u) - 2\sqrt{2}\big) = (v-y)\big((v+y) - \frac{2}{3}\big)$ se réécrit:

$0 = (v-y)\big((v+y) - \frac{2}{3}\big)$

On a donc un produit nul. Le facteur $(v+y) - \frac{2}{3}$ ne peut pas être nul car cela signifierait que $v + y = \frac{2}{3}$, or $v + y$ est un entier tandis que $\frac{2}{3}$ n'est pas entier.
C'est donc le facteur $v - y$ qui est nul.

Conclusion: $v = y$.

Conclusion.

Nous avons établi que lorsque l'on dispose de deux points rouges B et C tels que AB = AC alors B = C.

Un cercle de centre A passe donc toujours par au plus un point rouge.